Derivación implícita y extremos condicionados

En esta práctica aprenderemos a usar el programa *Mathematica* para calcular derivadas parciales de funciones definidas implícitamente y para calcular extremos condicionados de funciones de varias variables. Las funciones que vamos a considerar se supone que tienen derivadas parciales continuas en el conjunto abierto donde están definidas.

Curvas definidas implícitamente en el plano

Consideremos una función $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ donde Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$. La ecuación $g(x,y)=0$, es una forma de representar el conjunto $G=\{(x,y)\in\Omega : g(x,y)=0\}$. El teorema de la función implícita dice que si $(a,b)\in G$ y $D_2g(a,b)\neq 0$, entonces existen intervalos abiertos I,J tales que $a\in I$, $b\in J$, y para cada $x\in I$ hay un único $y\in J$ tal que $g(x,y)=0$. Además, la "función implícita" $\varphi : I\to J$, definida por la condición $g(x,\varphi(x))=0$ para todo $x\in I$, tiene derivada continua. En consecuencia $G\cap(I\times J)=$ $=\{(x,\varphi(x)) : x\in I\}$, lo que nos dice que localmente en (a,b), el conjunto G puede representarse como la gráfica de una función. La aplicación $\gamma : x\mapsto (x,\varphi(x))$ se dice que es una parametrización local de G en el punto (a,b). Nótese que $\varphi(a)=b$. Naturalmente, el vector tangente a G en el punto (a,b) es el vector $\gamma'(a)=(1,\varphi'(a))$. El cálculo de la derivada de la función implícita φ es muy fácil. para calcularla basta derivar en la identidad $g(x,\varphi(x))=0$ $(x\in I)$. Se obtiene así la igualdad

$$D_1g(x,\varphi(x))+D_2g(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$$

de donde

$$\varphi'(x)=\frac{-D_1g(x,\varphi(x))}{D_2g(x,\varphi(x))}$$

Precisamente, en la demostración del teorema los intervalos I,J se determinan de forma que $D_2g(x,y)\neq 0$ para $(x,y)\in(I\times J)\cap G$. Observa que $\big(\nabla g(x,\varphi(x)) \mid \gamma'(x)\big)=0$, en particular, el vector gradiente $\nabla g(a,b)$ es ortogonal al vector tangente a G en (a,b), $\gamma'(a)$.

Si $D_2g(a,b)=0$, pero $D_1g(a,b)\neq 0$, entonces es la variable y la que queda definida localmente como función de x y obtenemos conclusiones análogas a las anteriores. En consecuencia, la condición para que el conjunto G tenga parametrizaciones locales en cada punto es que el vector gradiente de g no se anule en G.

Recuerda que, dado (x_o,y_o) en Ω, la "curva" dada por $g(x,y)-g(x_o,y_o)=0$, se llama una curva de nivel de g que pasa por (x_o,y_o). Supuesto que $\nabla g(x_o,y_o)\neq(0,0)$, lo anterior prueba que el vector gradiente $\nabla g(x_o,y_o)$ es ortogonal a dicha curva de nivel en el punto (x_o,y_o).

Veamos un ejemplo. Sea $g(x,y)=-3+4x+8x^2-12x^3+3x^4+14y^2-20xy^2+8x^2y^2+5y^4$. Calculemos la tangente a la "curva" definida implícitamente por $g(x,y)=0$, en el punto $(3/2,\sqrt{3}/2)$. Se comprueba fácilmente $g(3/2,\sqrt{3}/2)=0$ y que $D_2g(3/2,\sqrt{3}/2)\neq 0$, por lo que podemos considerar y como función de x; función que estará definida en un intervalo I que contendrá a $3/2$ y que cumplirá $y(3/2)=\sqrt{3}/2$, y $g(x,y(x))=0$, para todo $x\in I$. Puedes calcular $y'(3/2)$ con *Mathematica*. Es fácil usando `Solve`. Seguro que se te ocurre cómo hacerlo. También puedes calcular la derivada segunda $y''(x)$.

Puedes dibujar la "curva" $g(x,y)=0$. Para ello, carga primero `Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]` y después usa la función de *Mathematica*

$$\boxed{\texttt{ImplicitPlot[g[x,y]==0,\{x,x}_{\texttt{min}}\texttt{,x}_{\texttt{max}}\texttt{\}]}}$$

Hazlo y puede que te lleves una sorpresa. ¿Es o no es una curva?

Extremos condicionados de funciones de dos variables

Sean $f,g\colon\Omega\to\mathbb{R}$ funciones definidas en un abierto Ω del plano. Definamos el conjunto

$$M=\{(x,y)\in\Omega : g(x,y)=0\}$$

y supongamos que el vector gradiente de g no se anula en M. El problema que vamos a considerar consiste en calcular los extremos locales o absolutos (caso de haberlos) de la función f *restringida* a M. Esto suele expresarse en la forma: "Calcular los extremos de $f(x,y)$ sabiendo que las variables x,y deben satisfacer la condición $g(x,y)=0$". A veces este problema puede reducirse fácilmente a un ejercicio de extremos de funciones de una variable. Eso ocurre cuando es posible *parametrizar globalmente* a M, es decir, que existe un intervalo I y una función $\varphi : I\to\mathbb{R}^2$, de forma que $M=\{\varphi(t) : t\in I\}$. En este caso podemos calcular explícitamente la *restricción* de f a M que es la función $h(t)=f(\varphi(t)),\ (t\in I)$ y nuestro problema es calcular los extremos de h en el intervalo I.

Veamos un ejemplo. Sea $f(x,y)=x^2-y^2, g(x,y)=x^2+y^2-1$ y queremos calcular los extremos de $f(x,y)$ bajo la condición $g(x,y)=0$. Observa que $g(x,y)=0$ es la circunferencia unidad, la cual se parametriza fácilmente de forma global por $\varphi(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t),\ (-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$. Con ello, todo se reduce a calcular los extremos de $h(t)=f(\varphi(t))=\cos 2t$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Hazlo.

Observa que la función $f(x,y)=x^2-y^2$ no tiene extremos locales. Puedes dibujar su gráfica con `Plot3D` para ver que es la típica "silla de montar". Ahora bien, el hecho de que f no tenga extremos locales no impide que la restricción de f a la circunferencia unidad sí los tenga como acabamos de comprobar. Dibuja la gráfica de la restricción de f a la circunferencia unidad para comprobar visualmente los resultados que has obtenido. Puedes usar la orden `ParametricPlot3D`.

La situación que acabamos de considerar no es demasiado frecuente. En las hipótesis hechas, la condición $g(x,y)=0$ representa una "curva", Γ, para la que, con frecuencia, sólo disponemos de parametrizaciones locales (el teorema de la función implícita garantiza la existencia de las mismas). ¿Cómo podemos calcular los extremos de $f(x,y)$ condicionados por $g(x,y)=0$ en el caso general? Supongamos que en el punto (a,b) f tiene un máximo condicionado. Eso quiere decir, por definición, que hay intervalos abiertos I,J, con $(a,b)\in I\times J$, tales que $f(x,y)\leqslant f(a,b)$ para todo $(x,y)\in(I\times J)\cap\Gamma$. Como, por hipótesis, el gradiente de g no se anula en (a,b), podemos suponer que $D_2g(a,b)\neq 0$, y sabemos que (tomando los intervalos I,J más pequeños si fuera preciso), hay una función $\varphi : I\to J$, tal que $\varphi(a)=b$ y $\Gamma\cap(I\times J)=\{(x,\varphi(x)) : x\in I\}$. Deducimos que la función $h(x)=f(x,\varphi(x)),\ (x\in I)$ tiene un máximo (absoluto) en $a\in I$, como el intervalo I es abierto y h es derivable en I, deberá ser $h'(a)=0$, es decir $D_1f(a,b)+D_2f(a,b)\varphi'(a)=0$. Por lo antes visto, sabemos que el vector $(1,\varphi'(a))$ es ortogonal al vector gradiente de g en (a,b); y acabamos de ver que dicho vector también es ortogonal al gradiente de f en (a,b). Deducimos que los vectores $\nabla g(a,b)$ y $\nabla f(a,b)$ están en el espacio ortogonal al vector $(1,\varphi'(a))$, el cual tiene dimensión 1 (estamos en $\mathbb{R}^2$), es decir tiene que existir un único número λ tal que $\nabla f(a,b)+\lambda\nabla g(a,b)=(0,0)$. Hemos obtenido así una condición necesaria para que un punto (a,b) sea un extremo de f condicionado por $g(x,y)=0$. La condición es que exista un número λ tal que el punto (a,b,λ) se un punto crítico de la *función de Lagrange*: $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$.

Ejercicio1
Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$, bajo la condición

$$g(x,y)=1+2x-2x^2-2x^3+x^4+2y+4xy-2x^2y-2y^2-2xy^2+2x^2y^2-2y^3+y^4=0$$

Superficies definidas implícitamente en el espacio

Dada una función $g:\Omega\to\mathbb{R}$ donde Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$. La ecuación $g(x,y,z)=0$, es una forma de representar el conjunto $G=\{(x,y,z)\in\Omega : g(x,y,z)=0\}$. El teorema de la función implícita dice que si $(a,b,c)\in G$ y $D_3g(a,b,c)\neq 0$, entonces existen intervalos abiertos $I\subset\mathbb{R}^2, J\subset\mathbb{R}$ (un intervalo en $\mathbb{R}^2$ es un rectángulo) tales que $(a,b)\in I$, $c\in J$, y para cada $(x,y)\in I$ hay un único $z\in J$ tal que $g(x,y,z)=0$. Además, la "función implícita" $\varphi : I\to J$, definida por la condición $g(x,y,\varphi(x,y))=0$ para todo $(x,y)\in I$, tiene derivadas parciales continuas. En consecuencia $G\cap(I\times J)=\{(x,y,\varphi(x,y)) : (x,y)\in I\}$, lo que nos dice que localmente en (a,b,c), el conjunto G puede representarse como la gráfica de una función. La aplicación $\gamma : (x,y)\mapsto(x,y,\varphi(x,y))$ se dice que es una parametrización local de G en el punto (a,b,c). Nótese que $\varphi(a,b)=c$. Naturalmente, el plano tangente a G en el punto (a,b,c) es el plano tangente a la gráfica de φ en (a,b,c), que viene dado por $z-\varphi(a,b)=D_1\varphi(a,b)(x-a)+D_2\varphi(a,b)(y-b)$, según sabemos. El cálculo de las derivadas parciales de la función implícita φ es muy fácil. Para calcularlas basta derivar en la identidad $g(x,y,\varphi(x,y))=0$, $(x,y)\in I$. Se obtiene así la igualdad

$$D_1g(x,y,\varphi(x,y))+D_3g(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=0$$

de donde

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=\frac{-D_1g(x,y,\varphi(x,y))}{D_3g(x,y,\varphi(x,y))}$$

Precisamente, en la demostración del teorema los intervalos I,J se toman de modo que $D_3g(x,y,z)\neq 0$ para $(x,y,z)\in(I\times J)\cap G$. Observa que $\left(\nabla g(x,y,\varphi(x,y)) \mid (1,0,\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right)=0$, en particular, el vector gradiente $\nabla g(a,b,c)$ es ortogonal al vector $(1,0,D_1\varphi(a,b))$. Igualmente resulta que $\nabla g(a,b,c)$ es ortogonal al vector $(0,1,D_2\varphi(a,b))$. Ahora bien, el plano definido por los vectores $(1,0,D_1\varphi(a,b))$ y $(0,1,D_2\varphi(a,b))$ que pasa por el punto (a,b,c) es precisamente el plano

$$z-\varphi(a,b)=D_1\varphi(a,b)(x-a)+D_2\varphi(a,b)(y-b)$$

es decir, es el plano tangente a G en el punto (a,b,c). Observa que puedes escribir la ecuación de dicho plano en la forma $\big(\nabla g(a,b,c)\mid(x-a,y-b,z-c)\big)=0$.

Si $D_3g(a,b,c)=0$, pero $D_2g(a,b,c)\neq 0$, entonces es la variable y la que queda definida localmente como función de x y de z, y obtenemos conclusiones análogas a las anteriores. En consecuencia, la condición para que el conjunto G tenga parametrizaciones locales en cada punto es que el vector gradiente de g no se anule en G.

Recuerda que, dado (x_o,y_o,z_o) en Ω, la "superficie" dada por $g(x,y,z)-g(x_o,y_o,z_o)=0$, se llama una superficie de nivel de g que pasa por (x_o,y_o,z_o). Supuesto que $\nabla g(x_o,y_o,z_o)\neq(0,0,0)$, lo anterior prueba que el vector gradiente $\nabla g(x_o,y_o,z_o)$ es ortogonal a dicha superficie de nivel en el punto (x_o,y_o,z_o).

Ejercicio 2

Calcular el plano tangente a la superficie definida implícitamente por

$$g(x,y,z)=1-x^2-2xy+2x^3y-y^2+2xy^3-z^2+2xyz^2=0$$

en el punto $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$. Comprueba que $g(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)=0$ y que $D_3g(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)\neq 0$, por lo que puedes considerar a z como función de x,y; función que estará definida en un intervalo I de $\mathbb{R}^2$ que contendrá a $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ y que cumplirá $z(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=0$, y $g(x,y,z(x,y))=0$, para todo $(x,y)\in I$. Puedes calcular con *Mathematica* las derivadas parciales de $z(x,y)$; incluso puedes calcular derivadas parciales de segundo orden de $z(x,y)$. Hazlo. Finalmente, intenta dibujar con *Mathematica* la "superficie" $g(x,y,z)=0$.

Extremos condicionados de funciones de tres variables

Sean $f,g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ funciones definidas en un abierto Ω del espacio. Definamos el conjunto

$$M=\{(x,y,z)\in\Omega : g(x,y,z)=0\}$$

y supongamos que el vector gradiente de g no se anula en M. El problema que vamos a considerar consiste en calcular los extremos locales o absolutos (caso de haberlos) de la función f *restringida* a M. Esto suele expresarse en la forma: "Calcular los extremos de $f(x,y,z)$ sabiendo que las variables x,y,z deben satisfacer la condición $g(x,y,z)=0$". A veces este problema puede reducirse fácilmente a un ejercicio de extremos de funciones de dos variable. Eso ocurre cuando es posible *parametrizar globalmente* a M, es decir, que existe un intervalo I en $\mathbb{R}^2$ y una función $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$, de forma que $M=\{\varphi(s,t),(s,t)\in I\}$. En este caso podemos calcular explícitamente la restricción de f a M que es la función $h(s,t)=f(\varphi(s,t)),\ \ ((s,t)\in I)$ y nuestro problema es calcular los extremos de h en el intervalo $I\subset\mathbb{R}^2$.

Veamos un ejemplo. Sean $f(x,y,z)=x^2-y^2$, $g(x,y)=x^2+y^2+z^2-1$. Queremos calcular los extremos de $f(x,y)$ con la condición $g(x,y,z)=0$. Fíjate que $g(x,y,z)=0$ es la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$, que se parametriza fácilmente de forma global por $\varphi(s,t)=(\cos s\cos t,\cos s\operatorname{sen} t,\operatorname{sen} s)$, donde $-\pi/2\leqslant s\leqslant \pi/2$, $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$. Con ello, todo se reduce a calcular los extremos de $h(s,t)=f(\varphi(s,t))=\cos^2 s\cos 2t$ en el intervalo compacto $[-\pi/2,\pi/2]\times[-\pi,\pi]$. Hazlo.

La situación que acabamos de considerar no es demasiado frecuente. En las hipótesis hechas, la condición $g(x,y,z)=0$ representa una "superficie", Γ, para la que, con frecuencia, sólo disponemos de parametrizaciones locales (el teorema de la función implícita garantiza la existencia de las mismas). ¿Cómo podemos calcular los extremos de $f(x,y,z)$ condicionados por $g(x,y,z)=0$ en el caso general? Supongamos que en el punto (a,b,c) f tiene un máximo condicionado. Eso quiere decir, por definición, que hay intervalos abiertos I,J, con $(a,b)\in I\subset\mathbb{R}^2$, $c\in J$, tales que $f(x,y,z)\leqslant f(a,b,c)$ para todo $(x,y,z)\in(I\times J)\cap\Gamma$. Como, por hipótesis, el gradiente de g no se anula en (a,b,c), podemos suponer que $D_3g(a,b,c)\neq 0$, y sabemos que (tomando los intervalos I,J más pequeños si fuera preciso), hay una función $\varphi : I\to J$, tal que $\varphi(a,b)=c$ y $\Gamma\cap(I\times J)=\{(x,y,\varphi(x,y)) : (x,y)\in I\}$. Deducimos que la función $h(x,y)=f(x,y,\varphi(x,y))$, $(x,y)\in I$ tiene un máximo (absoluto) en $(a,b)\in I$. Como el intervalo I es abierto y h es diferenciable en I, deberá ser $\nabla h(a,b)=(0,0)$, es decir $D_1f(a,b,z)+D_3f(a,b,c)D_1\varphi(a,b)=0$, y $D_2f(a,b,z)+D_3f(a,b,c)D_2\varphi(a,b)=0$. Por lo antes visto, sabemos que el vector $(1,0,D_1\varphi(a,b))$ es ortogonal al vector gradiente de g en (a,b,c); y acabamos de ver que dicho vector también es ortogonal al gradiente de f en (a,b,c). Igual ocurre con el vector $(0,1,D_2\varphi(a,b))$. Deducimos que los vectores $\nabla g(a,b,c)$ y $\nabla f(a,b,c)$ están en el espacio ortogonal al plano engendrado por los vectores $(1,0,D_1\varphi(a,b))$ y $(0,1,D_2\varphi(a,b))$ el cual tiene dimensión 1 (estamos en $\mathbb{R}^3$), es decir tiene que existir un único número λ tales que $\nabla f(a,b,c)+\lambda\nabla g(a,b,c)=(0,0,0)$. Hemos obtenido así una condición necesaria para que un punto (a,b,c) sea un extremo de f condicionado por $g(x,y,z)=0$. La condición es que exista un número λ tal que el punto (a,b,c,λ) sea un punto crítico de la *función de Lagrange*: $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$.

Ejercicio3
Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$, bajo la condición

$$g(x,y,z)=4x^3+9y^3+16z^3-25=0$$